Коши тектес интеграл туындыларының шектік мәндері

Айталық, $\varphi(t)$ функциясының m-ші туындысы L тұйық контурында Гельдер шартын қанағаттандырсын. Онда

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

Коши тектес интегралы арқылы анықталған $\Phi(z)$ функциясының m-ретті туындысының контурда шекаралық мәні бар және олар

$$\Phi^{(m)+}(t) = \frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - t} d\tau, \tag{14}$$

$$\Phi^{(m)-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - t} d\tau \tag{15}$$

формулалары арқылы анықталады.

Шынында да, $\Phi(z)$ функциясының m-ретті туындысы

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - z)^{m+1}} d\tau .$$

формуласы арқылы есептелінетіні айқын. Мұны m рет бөліктеп интегралдасақ, контур тұйықтылығынан әрбір интегралданған бөлігі нөлге айналады.

Сондықтан

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - z} d\tau .$$

Бұған Сохоцкий формулаларын қолдансақ, (14) және (15) формулаларға келеміз.

Коши тектес интегралдың туындылары

Енді дифференциалдану және контур нүктесіне шекке көшу операцияларының орын ауыстыру заңдылығына ие екенін, яғни Коши тектес интегралдың туындыларының контурдағы шектік мәндері мен оның шектік мәндері туындыларының тең екенін көрсетейік. Ең алдымен (14), (15) формулаларда m=1 деп есептейік. Сонда

$$[\Phi'(t)]^{\pm} = \left[\Phi^{\pm}(t)\right]'$$

екенін дәлелдеу керек. Егер

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

белгілеуін енгізсек, онда

$$[\Phi'(t)]^{\pm} = \psi^{\pm}(t)$$

екенін және

$$\left[\Phi^{\pm}(t)\right]' = \psi^{\pm}(t)$$

болатынын дәлелдеу керек. Анықтылық үшін дәлелдеуді $[\Phi'(t)]^{+}$ үшін жүргізейік. Ал $\left[\Phi^{+}(z)\right]'$ контурға дейін үзіліссіз және контурда Гельдер шартын қанағаттандыратын болғандықтан, $\left[\Phi^{+}(t)\right]'$ бар және Гельдер шартын қанағаттандырады. Сонда

$$\left[\Phi^{+}(t)\right]' = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Phi^{+}(t+\Delta t) - \Phi^{+}(t)}{\Delta t}.$$

Коши теоремасы бойынша

$$\Phi^{+}(t+\Delta t) - \Phi^{+}(t) = \int_t^{t+\Delta t}\left[\Phi^{+}(t)\right]' dt = \int_C \left[\Phi^{+}(z)\right]' dz,$$

мұнда C арқылы $Д^{+}$ аймағының ішінде толығымен жатқан контур белгіленген. Екінші жағынан

$$\int_C \left[\Phi^{+}(z)\right]' dz = \int_C \psi^{+}(z)dz = \psi^{+}(t)\Delta t + \int_C \left[\psi^{+}(z) - \psi^{+}(t)\right]dz.$$

C контурын ұзындығы $2|\Delta t|$ болатындай және кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін

$$\left|\psi^{+}(z) - \psi^{+}(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

теңсіздігі орындалатындай етіп аламыз. Бұлай етіп алуға болады, өйткені $\psi^{+}(z)$ контурға дейін үзіліссіз. Сонда

$$\left|\frac{\Phi^{+}(t+\Delta t)-\Phi^{+}(t)}{\Delta t}-\psi^{+}(t)\right|<\varepsilon$$

Мұнан

$$\left[\Phi^{+}(t)\right]'=\psi^{+}(t)$$

екені шығады. Дәл осылай $\Phi^{-}(z)$ жағдайы да дәлелденеді. Әрі қарай жалғастырып,
$\varphi^{(m)}(t)\in H$ болғанда

$$\left[\Phi^{\pm}(t)\right]^{(m)}=\left[\Phi^{(m)}(t)\right]^{\pm} \qquad (16)$$

екені дәлелденеді.

Ерекше интегралды дифференциалдау ережесі

Енді

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

ерекше интегралын дифференциалдау ережесін шығаруға болады. Ол үшін $\Phi^{+}(z)$ және $\left[\Phi^{(m)}(z)\right]^{+}$ функцияларының

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\Phi(t),$$

$$\left[\Phi^{(m)}(t)\right]^{+}=\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

Сохоцкий формулаларын жазамыз. Ал $\varphi(t)$ функциясының ұйғаруымыз бойынша және $\Phi^{+}(t)$ функцияның дәлелдеуіміз бойынша m-ші ретке дейін туындалары бар, сондықтан $\Phi^{+}(t)$ функцияның да m-ші туындалары бар. Сонда бірінші теңдікті m рет дифференциалдап, сонан соң оны екінші теңдікпен салыстырып, сонымен бірге (16) теңдікті ескеріп

$$\Phi^{(m)}(t)=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]^{(m)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau-t}d\tau \qquad (17)$$

аламыз.

Ескерту. Біз жоғарыда L контурын жатық сызық деп есептедік. Сохоцкий формулаларын саны ақырлы бұрыштық нүктелері бар контур жағдайында да дәлелдеуге болады.

Коши тектес интегралдың үзіліссіздік сипаты

Коши тектес интегралдың шектік мәндері $\Phi^{+}(t), \Phi^{-}(t)$ функцияларының L контурында үзіліссіз екенін көрсеттік. Бірақ та бұл функциялардың үзіліссіздікке қарағанда тереңірек, олардың өздерінің Гельдер шартын қанағаттандыратын қасиеті бар екен.

Племель-Привалов теоремасы. Егер тұйық жатық L контурында $\varphi(t)$ функциясы $H^{\lambda}(L)$ Гельдер шартын қанағаттандырса, онда Коши тектес интегралының шектік $\Phi^{+}(t)$ және $\Phi^{-}(t)$ мәндері де $\lambda<1$ жағдайында $H^{\lambda}(L)$ Гельдер шартын қанағаттандырады, ал егер $\lambda=1$ болса, онда $H^{\lambda-\varepsilon}(L)$ шартын қанағаттандырады, мұндағы ε- жеткілікті аз оң тұрақты.

Дәлелдеу. Сохоцкий формулаларын былай

$$\Phi^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

өрнектеп, мұның оң жағындағы бірінші және соңғы қосылғыштардың Гельдер шартын қанағаттандыратынын байқаймыз. Сондықтан теореманы

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau$$

функциясы үшін дәлелдеу жеткілікті. Ол үшін біріне бірі жеткілікті жақын кез келген t_1 және t_2 нүктелері үшін

$$|\psi(t_2)-\psi(t_1)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau\right| \qquad (1)$$

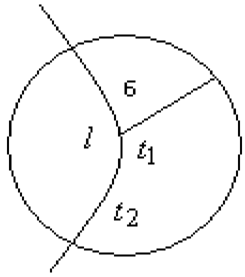
айырымын бағалаймыз**.**

Алдымен, центрі t_1, радиусы δ және L қисығын a және b нүктелерінде қиятын шеңбер көмегімен L контурынан l бөлігін аламыз.Айталық, t_2 кез келген t_1 нүктесінен ерекше l қисығының a және b нүктелеріне тең емес нүкте. Сонда $\delta=k|t_2-t_1|$ десек, онда $k>1$ екені айқын. Егер $s=s(t,\tau)$ арқылы ұштары t және τ болатын L контурының екі доғасының ең кішісінің ұзындығын белгілесек, онда L контурында жатықтығының (3) (§3) формуласынан шығатын L контурының кез келген t_1, t_2 нүктелері үшін

$$|s(t_1,t_2)| \le m|t_2 - t_1| \tag{2}$$

теңсіздігін жазуға болады, мұндағы m-оң тұрақты.

Сөйтіп (1) айырымды былай өрнектейміз:



$$\psi(t_2) - \psi(t_1)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\phi(\tau)-\phi(t_2)}{\tau - t_2}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\phi(\tau)-\phi(t_1)}{\tau - t_1}d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\left\{\frac{\phi(\tau)-\phi(t_2)}{\tau - t_2} - \frac{\phi(\tau)-\phi(t_1)}{\tau - t_1}\right\}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\phi(\tau)-\phi(t_2)}{\tau - t_2}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\phi(\tau)-\phi(t_1)}{\tau - t_1}d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\phi(t_1)-\phi(t_2)}{\tau - t_1}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{[\phi(\tau)-\phi(t_2)](t_2-t_1)}{(\tau-t_1)(\tau-t_2)}d\tau$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Енді тура 3 параграфтың негізгі леммасын дәлелдеудегідей

$$|\mathrm{I}_2| \le \frac{1}{2\pi}\int_l \left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau - t_1}\right||d\tau| < \frac{Am}{2\pi}\int_l r^{\lambda-1}|dr| \le \frac{Am}{\pi}\int_0^\delta r^{\lambda-1}dr = A_1|t_2 - t_1|^\lambda$$

бағалауын аламыз. Дәл осылай

$$|\mathrm{I}_1| \le A_2|t_2 - t_1|^\lambda.$$

Ал I_3 интегралын бағалау үшін әуелі

$$|\mathrm{I}_3| \le \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{2\pi}\left|\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau - t_1}\right| \le \frac{A|t_2 - t_1|^\lambda}{2\pi}\left|\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau - t_1}\right|$$

теңсіздігін жазып, сонан соң соңғы интегралды тікелей есептесек

$$\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau - t_1} = \ln\frac{a - t_1}{b - t_1}.$$

Бұл t_1-дің L контурындағы кез келген мәндерінде шектеулі. Сондықтан

$$|\mathrm{I}_3| \le A_3 |t_2 - t_1|^{\lambda}$$

бағалауын табамыз.

Ең күрделі I_4 интегралын бағалауға көшейік. Оған Гельдер шартымен 3 параграфтағы (3) формуланы пайдаланып,

$$|\mathrm{I}_4| \le A \frac{|t_2 - t_1|}{2\pi} \int_{L-l} \frac{|d\tau|}{|\tau - t_1||\tau - t_2|^{1-\lambda}} \le A' |t_2 - t_1| \int_{L-l} |\tau - t_1|^{\lambda - 2} \left| \frac{\tau - t_1}{\tau - t_2} \right|^{1-\lambda} |d\tau|$$

теңсіздігін аламыз. Ал

$$|\tau - t_1| - |t_1 - t_2| \le |\tau - t_2| \quad \text{және } |\tau - t_2| \ge \delta = k|t_2 - t_1|$$

болғандықтан,

$$|\tau - t_1| \le \frac{k+1}{k} |\tau - t_2|,$$

демек,

$$|\mathrm{I}_4| \le A'' \left(\frac{k+1}{k} \right)^{1-\lambda} |t_2 - t_1| \int_R^{\delta} r^{\lambda - 2} dr$$

Мұндағы

$$R = \max_{\tau \in L-l} |\tau - t_1|.$$

Егер $\lambda < 1$ болса, онда соңғы (3) интегралды есептеп,

$$|\mathrm{I}_4| \le A_4 |t_2 - t_1|^{\lambda}$$

бағалауын аламыз.

Егер $\lambda = 1$болса, онда (3) интегралды есептеуден,

$$|\mathrm{I}_4| \le A_4' |t_2 - t_1| |\ln |t_2 - t_1|| \qquad (1)$$

теңсіздігін аламыз да, ал $\ln(x)$ функциясының x нөлге ұмтылғанда $|x|$ функциясының кез келген теріс дәрежесінен, яғни $|x|^{-\varepsilon} (\varepsilon > 0)$ функциясынан жай өсетін болғандықтан (яғни $|x|^{\varepsilon} \ln |x| \to 0, \quad |x| \to 0, \quad \forall \varepsilon > 0$) (1) теңсіздіктен

$$|\mathrm{I}_4| \le A_4' |t_2 - t_1|^{1-\varepsilon}$$

теңсіздігін аламыз.

Сонымен, $\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_4$ бағалауларын салыстырып және $\lambda = 1$ жағдайда $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ бағалауларында λ көрсеткішін $1 - \varepsilon$ мен ауыстыруға болатынын байқап, теорема дәлелдеуін аламыз.

Ескерту. Теореманы тұйық емес контур үшін де оны толықтыру арқылы осы жағдайға келтіріп дәлелдеуге болады.